



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



International Journal of Thermal Sciences 42 (2003) 407–416

International  
Journal of  
Thermal  
Sciences

[www.elsevier.com/locate/ijts](http://www.elsevier.com/locate/ijts)

## Tenseurs effectifs de conductivité thermique des composites à texture arbitraire

## Effective thermal conductivity tensors of composite materials with arbitrary texture

Kliment Hadjov

*Université de Technologie Chimique et Metallurgie, Département de Mécanique Appliquée, blv. Kl. Ohridski 8, 1756 Sofia, Bulgarie*

Reçu le 26 juin 2001 ; accepté le 28 mai 2002

### Résumé

Ce travail concerne l'étude théorique des processus de transfert de chaleur dans des composites d'inclusions anisotropes de différente forme et de répartition arbitraire. Il concerne également les composites à « petite échelle »—grand nombre d'inclusions aux petites dimensions. A part cela on suppose un bon contact entre la matrice et les inclusions. On a trouvé des expressions simples reliant les composantes du tenseur effectif de la conductivité thermique et les composantes respectives des phases du composite. On tient compte de la répartition et de la géométrie des inclusions en utilisant des tenseurs de la texture et de la forme. L'existence de pores est également prise en compte. Les résultats théoriques sont comparés aux expérimentations et à d'autres théories.

© 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

### Abstract

This work propose a homogenization technique to obtain the effective thermal conductivity tensor of heterogeneous solids. These solids are composite materials containing anisotropic inclusions with different form and arbitrary repartition. The work concern "small scale" composites with good contact between matrix and inclusions so that there is no temperature discontinuity across interfaces. Simple expressions between the effective tensor components of the thermal conductivity and the respective components of the composite phases have been obtained. We consider the inclusions repartition and geometry with the help of texture and form tensors. The occurrence of pores is also taken into account. The theoretical results are compared with experimental data and other theories.

© 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

*Mots-clés* : Conductivité thermique ; Composites ; Anisotropie ; Texture ; Homogénéisation

*Keywords*: Thermal conductivity; Composites; Anisotropy; Texture tensors; Homogenization

### 1. Introduction

L'application industrielle de différents matériaux composites exige la création de composites aux inclusions anisotropes afin d'améliorer leurs propriétés mécaniques (grands modules élastiques) et thermiques (grande ou faible conductivité thermique dans certaines directions) [1–3]. Le flux de chaleur qui traverse un corps anisotrope change suivant la direction. Dans le cadre général le vecteur flux n'est pas co-

linéaire au gradient de la température. Ces deux vecteurs sont reliés par l'intermédiaire d'un tenseur matériel appelé tenseur de la conductivité thermique—loi de Fourier [3–5]. D'après le principe d'Onsager [5] ce tenseur est symétrique. Le but de ce travail est d'établir des expressions analytiques permettant d'évaluer les composantes de ce tenseur en fonction des composantes de ceux caractérisant les différentes phases et la texture du composite. Ceci est obtenu grâce à la détermination des valeurs moyennes du gradient de température dans chaque phase (moyenne locale) et dans tout le composite (moyenne globale). Le travail concerne les composites à « petite échelle » c.à.d. au grand nombre d'inclu-

Adresse e-mail : [klm@uctm.edu](mailto:klm@uctm.edu) (K. Hadjov).

Nomenclature	
$a$	température, concentration, ou bien les gradients respectifs
$H, H$	tenseur de la texture et sa troisième composante diagonale
$H^*, H^*$	tenseur de la forme des inclusions et fonction de la forme (troisième composante diagonale du tenseur $H^*$ )
$\widehat{H}$	tenseur de la répartition d'éléments surfaciques
$K, K_{ij}$	tenseur de la conductivité thermique et ses composantes ..... $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
$M, B, A$	tenseurs associés au volume caractéristique
$N, \eta_{ij}$	tenseur des quotients des coefficients thermiques inclusion-matrice et ses composantes
$n$	vecteur unité normal à la surface de l'inclusion
$u$	vecteur unité suivant l'axe de l'inclusion
$v$	densité de flux de chaleur des phases (suivant les indices), sans indice-flux global ... $W \cdot m^{-2}$
$a, b$	longueur des axes de l'ellipsoïde (l'inclusion)
$f$	fraction volumique des inclusions
$k$	rapport des valeurs intensives des phases (température, concentration)
$N, dN$	nombre total des inclusions et nombre des inclusions orientées suivant $u$ dans $d\Omega(u)$
$S, dS$	surface des inclusions et élément de surface $m^2$
$V, dV$	volume des phases (suivant les indices, sans indice-volume global) et élément de volume $m^3$
$T$	température ..... K
$p, m, b, d, G, F$	paramètres de la forme, de la répartition et des propriétés thermiques
$\rho$	rayon de courbure de l'interface ..... m
$\Omega, d\Omega(u)$	semisphère unitaire et angle solide élémentaire contenant le vecteur $u$
$\Phi(u)$	densité de répartition des inclusions suivant $u$
$\varphi, \theta$	angles du système sphérique local (et global avec) ..... rad
$\langle \cdot \rangle, \langle \langle \cdot \rangle \rangle$	moyenne volumique des phases et moyenne volumique globale
$\langle \circ \rangle$	indice de la matrice
$\langle * \rangle$	indice des inclusions
$p$	indice associé aux pores

sions de petites dimensions [6,7]. Les travaux sur l'homogénéisation des propriétés thermiques des composites traitent le plus souvent de phases isotropes. En plus la texture des composites est très souvent élémentaire-renforcement unidirectionnel ou bien quasi isotrope [4,6,8]. Certains articles traitent de la forme des inclusions, mais ne tiennent pas compte de leur anisotropie [6,7]. Dans cet article on propose un modèle d'homogénéisation de composites à texture arbitraire dont les inclusions présentent une anisotropie de conductivité thermique, tandis que la matrice reste isotrope. Le modèle est capable de prendre en compte la forme des inclusions. Dans ce cadre (texture, forme et anisotropie des inclusions) l'investigation est très générale et cela représente l'intérêt du travail. D'un autre aspect il est limité et ne concerne que les composites à petite échelle. Par exemple les composites tissés et les stratifiés à grande épaisseur des couches restent hors de nos recherches. On suppose également un bon contact thermique matrice-inclusions et l'on néglige le couplage entre les différents champs—température, contraintes thermiques etc. [9].

**2. Grandeurs moyennes associées au milieu hétérogène**

Admettons que  $V$  soit un petit volume caractéristique et que  $V = V^\circ + V^*$ , où  $V^\circ$  et  $V^*$  sont les volumes des deux phases (matrice et inclusions) formant le volume caractéristique global  $V$ . Dorénavant à l'aide des indices supérieurs « $\circ$ » et « $*$ » on va marquer les valeurs caractérisant respectivement la matrice et les inclusions. Soit  $a$  une valeur intensive scalaire—la température  $T$ , ou vectorielle—le gradient

respectif—grad  $T$ . On va trouver la valeur moyenne respective sur les volumes comme suit

$$\langle a^\circ \rangle = \frac{1}{V^\circ} \int_{V^\circ} a^\circ dV^\circ, \quad \langle a^* \rangle = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} a^* dV^* \tag{1}$$

$$\langle \langle a \rangle \rangle = \frac{1}{V} \int_V a dV = \frac{1}{V} \left( \int_{V^\circ} a^\circ dV^\circ + \int_{V^*} a^* dV^* \right)$$

Introduisons la fraction volumique  $f$  d'inclusions dans le composite

$$f = V^* / V \tag{2}$$

De l'équation (1) et (2) on arrive à

$$\langle \langle a^\circ \rangle \rangle = (1 - f) \langle a^\circ \rangle, \quad \langle \langle a^* \rangle \rangle = f \langle a^* \rangle \tag{3}$$

$$\langle \langle a \rangle \rangle = (1 - f) \langle a^\circ \rangle + f \langle a^* \rangle$$

Le volume caractéristique  $V$  étant petit, on va supposer que les valeurs  $f, \langle a^\circ \rangle, \langle a^* \rangle, \langle \langle a \rangle \rangle$  etc. sont des champs scalaires ou vectoriels. Il est bien évident que les opérations de moyenne sur le volume et de différentiation sur les coordonnées ne sont pas commutatives. On va donc distinguer grad  $\langle T^* \rangle$  et  $\langle \text{grad } T^* \rangle$ .

Le théorème suivant est bien connu [6,10]

$$\langle \langle \text{grad } T \rangle \rangle = \text{grad} \langle \langle T \rangle \rangle \mp \frac{1}{V} \int_S T n dS \tag{4}$$

Ici  $dS$  est un élément de la surface des inclusions, tandis que  $n$  est sa normale externe. Le signe négatif se rapporte au cas  $T = T^\circ$ , et le signe positif au cas  $T = T^*$ . On va faire l'hypothèse supplémentaire que le rapport des températures

des deux phases est constant sur la frontière commune  $S$  et les modules des gradients locaux de la température comme les distances entre les frontières des phases dans le volume caractéristique sont suffisamment petits [6]

$$T^*/T^\circ = k \quad \text{sur } S \quad \text{et} \quad \langle T^* \rangle / \langle T^\circ \rangle = k \quad (5)$$

Lorsque  $k = 1$ , le contact entre phases est parfait et le champ de la température ne peut pas avoir de discontinuités aux frontières. Afin de pouvoir généraliser les formules pour n'importe quel champ (par exemple le champ de la concentration d'un fluide dans le cas de diffusion massique), on a gardé le paramètre  $k$  dans l'équation (5). Il est bien évident que dans ce cas  $0 \leq k \leq \infty$ .

Des équations (5) et (1), on obtient

$$\langle T^\circ \rangle = \langle\langle T^\circ \rangle\rangle + \frac{1}{k} \langle\langle T^* \rangle\rangle \quad (6)$$

A l'aide de l'équation (4) écrite une fois avec « $\circ$ » et une autre avec « $*$ » et après avoir dérivé l'équation (6), en tenant compte de l'équation (5) on obtient

$$\text{grad} \langle T^\circ \rangle = \langle\langle \text{grad} T^\circ \rangle\rangle + \frac{1}{k} \langle\langle \text{grad} T^* \rangle\rangle \quad (7)$$

A partir des deux premières équations de (3), l'équation (7) devient

$$\text{grad} \langle T^\circ \rangle = (1 - f) \langle\text{grad} T^\circ \rangle + \frac{f}{k} \langle\text{grad} T^* \rangle \quad (8)$$

D'après la dernière équation (3) pour le flux de chaleur moyen on a

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = (1 - f) \langle\mathbf{v}^\circ \rangle + f \langle\mathbf{v}^* \rangle \quad (9)$$

### 3. Conductivité thermique du milieu homogène équivalent

Les lois locales du transfert de la chaleur sont bien connues [5,6,10]

$$\mathbf{v}^\circ = -\mathbf{K}^\circ \cdot \text{grad} T^\circ, \quad \mathbf{v}^* = -\mathbf{K}^* \cdot \text{grad} T^* \quad (10)$$

où  $\mathbf{K}^\circ$  et  $\mathbf{K}^*$  sont les tenseurs de la conductivité thermique des phases. Calculons la moyenne de (10) et plaçons la dans (9)

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = -(1 - f) \mathbf{K}^\circ \cdot \langle\text{grad} T^\circ \rangle - f \mathbf{K}^* \cdot \langle\text{grad} T^* \rangle \quad (11)$$

Maintenant on suppose que les gradients moyens de la température dans les phases sont proportionnels

$$\langle\text{grad} T^* \rangle = k \mathbf{M} \cdot \langle\text{grad} T^\circ \rangle \quad (12)$$

Ici et jusqu'à la fin le point dénote le produit contracté.  $\mathbf{M}$  est un tenseur symétrique d'ordre deux associé au volume caractéristique. Il va être déterminé ultérieurement.

Maintenant on remplace l'équation (12) dans l'équation (11) et l'on introduit le tenseur

$$\mathbf{N} = (\mathbf{K}^\circ)^{-1} \cdot \mathbf{K}^* \quad (13)$$

dont les composantes dans les axes principaux des inclusions représentent les quotients des composantes respectives des tenseurs de la conductivité thermique des deux phases. De cette façon, à partir des équations (11), (12), (13), on aboutit à

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = -\mathbf{K}^\circ \cdot \mathbf{B} \cdot \langle\text{grad} T^\circ \rangle \quad (14)$$

où le tenseur  $\mathbf{B}$  est spécifique pour le volume caractéristique

$$\mathbf{B} = (1 - f) \mathbf{1} + f k \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} \quad (15)$$

Dans l'équation (15)  $\mathbf{1}$  est le tenseur unité de Kronecker.

On dérive la dernière équation de (3) et l'équation (5) et l'on obtient

$$\text{grad} \langle\langle T \rangle\rangle = (1 - f + f k) \text{grad} \langle T^\circ \rangle \quad (16)$$

Des équations (8) et (12) on arrive à

$$\text{grad} \langle T^\circ \rangle = \mathbf{A} \cdot \langle\text{grad} T^\circ \rangle \quad (17)$$

où l'on a posé

$$\mathbf{A} = (1 - f) \mathbf{1} + f \mathbf{M} \quad (18)$$

De (14), (16), (17) il suit

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = -\mathbf{K} \cdot \text{grad} \langle\langle T \rangle\rangle \quad (19)$$

Dans l'équation (19) on a posé

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{K}^\circ \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}}{1 - f(1 - k)} \quad (20)$$

Il est bien évident que l'équation (19) représente la loi effective de la conductivité thermique (comparer à l'équation (10)). On peut donc affirmer, que le tenseur  $\mathbf{K}$  représente le tenseur homogénéisé de la conductivité thermique.

### 4. Influence de la géométrie des inclusions et leur répartition

En absence de sources de chaleur sur la frontière des phases et dans le cas de frontières nondéformables, la loi de conservation du flux de chaleur entre les deux phases s'écrit [6,10]

$$\mathbf{v}^\circ \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} \quad (21)$$

où  $\mathbf{n}$  était le vecteur unité de la normale de la frontière.

A l'aide des lois locales (10) de (21) on obtient

$$(\mathbf{K}^\circ \cdot \text{grad} T^\circ) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{K}^* \cdot \text{grad} T^*) \cdot \mathbf{n} \quad (22)$$

De la première équation de (5) et après différentiation selon une direction arbitraire du plan tangent des phases, on obtient

$$\text{grad} T^\circ \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{k} \text{grad} T^* \cdot \mathbf{r} \quad (23)$$

où le vecteur unité  $\mathbf{r}$  se trouve sur le plan tangent des phases ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$ ). L'équation (22) peut être réécrite en tenant compte de l'équation (13) de sorte que

$$\text{grad} T^\circ \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{N} \cdot \text{grad} T^*) \cdot \mathbf{n} \quad (24)$$

Maintenant on oriente les scalaires (23), (24) suivant le plan tangent et la normale. On prend en compte les expressions suivantes

$$\mathbf{n}(\text{grad } T \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \text{grad } T$$

$$\mathbf{r}(\text{grad } T \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \text{grad } T$$

où  $\otimes$  est le produit tensoriel et après transformations on arrive aux relations

$$(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \text{grad } a^\circ = N \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \text{grad } a^*)$$

$$(\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \text{grad } a^\circ = \frac{1}{k} (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \text{grad } a^*$$

Après sommation de ces deux équations on obtient une relation entre les gradients dans les phases

$$\text{grad } T^\circ = \frac{1}{k} (\mathbf{1} + (kN - \mathbf{1}) \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) \cdot \text{grad } T^* \quad (25)$$

Maintenant on émet les hypothèses suivantes :

(1) La phase «\*» est une petite surface fermée convexe ayant un axe de symétrie matériel et géométrique. Elle est entourée de la phase «o» de la sorte que dans l'inclusion «\*» et sur la frontière  $S$  le champ de température  $T^*$  puisse être considéré comme uniforme

$$\text{grad } T^* = \text{const}$$

Par conséquent l'étude présentée ici ne concerne pas le cas d'un remplissage très grand d'inclusions. L'hypothèse faite est conforme à la plupart des situations pratiques.

(2) Les valeurs moyennes du champ  $\text{grad } T^\circ$  sur la frontière coïncidant avec les valeurs moyennes dans un volume infinitésimal autour de la frontière contenant l'inclusion, diffèrent peu des valeurs moyennes du champ de la température dans le volume «o» de la matrice qui l'entoure dans le cadre du volume caractéristique. En autres termes en dehors de l'inclusion sur la frontière  $S$  on peut intégrer le champ  $\text{grad } T^\circ$  dans le volume et sur la frontière sans faire la différence :

$$\langle \text{grad } T^\circ \rangle = \frac{1}{V^\circ} \int \text{grad } T^\circ dV^\circ \approx \frac{1}{S} \int \text{grad } T^\circ dS$$

Cette hypothèse nous ramène au cas de la « petite échelle ». Après intégration de l'équation (25) sur  $S$  on obtient

$$\langle \text{grad } T^\circ \rangle = \frac{1}{k} (\mathbf{1} + (kN - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{H}^*) \cdot \text{grad } T^* \quad (26)$$

Ici

$$\mathbf{H}^* = \frac{1}{S} \int \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} dS \quad (27)$$

est un tenseur caractérisant la géométrie des inclusions (la phase «\*»).

On procède maintenant à l'évaluation de ce tenseur. En employant un système sphérique d'axes pour l'élément de surface  $dS$  de l'inclusion et pour les composantes de la normale  $\mathbf{n}$  on peut écrire [11–13] Fig. 1

$$\begin{aligned} dS &= \rho^2(\theta) d\Omega, & d\Omega &= \sin \theta d\theta d\varphi \\ n_1 &= \sin \theta \cos \varphi, & n_2 &= \sin \theta \sin \varphi, & n_3 &= \cos \theta \end{aligned} \quad (28)$$

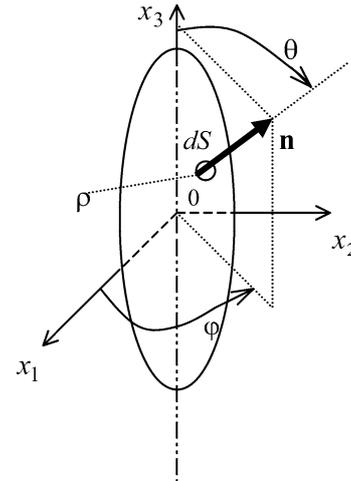


Fig. 1. Système local : géométrie des inclusions.

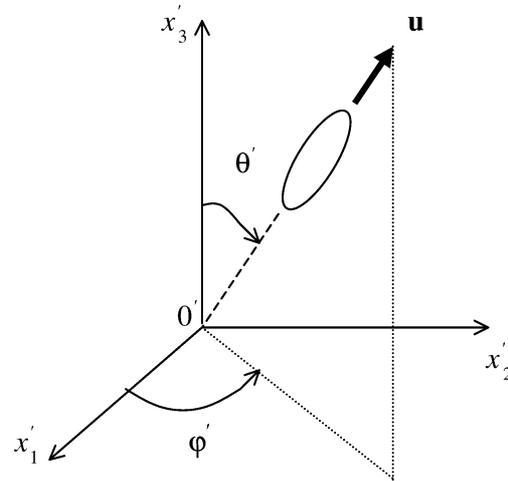


Fig. 2. Système global : orientation des inclusions.

où  $\rho$  est le rayon de la courbure de la section de  $dS$  avec le plan de  $\mathbf{n}$  et  $0x_3$ ,  $d\Omega$  est un angle solide infinitésimal contenant la normale  $\mathbf{n}$ , tandis que  $\theta, \varphi$  sont les angles définissant l'orientation de la normale  $\mathbf{n}$  par rapport du système local des axes  $0x_1, x_2, x_3$  (voir Figs. 1 et 2). Dans [13,14] on a déterminé un tenseur de la répartition d'éléments surfaciques de normale  $\mathbf{n}$  dans le système local

$$\hat{\mathbf{H}} = \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{n}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\Omega \quad (29)$$

où  $\Omega$  est la surface de la semisphère unitaire et  $\Phi(\mathbf{n})$  est la fonction de la répartition des éléments orientés. Cette fonction peut être définie comme [13,14]

$$\Phi(\mathbf{n}) = \frac{dS(\mathbf{n})}{S d\Omega(\mathbf{n})} \quad (30)$$

où  $dS$  est la surface d'un élément orienté contenu dans  $d\Omega$ , et  $S$  est la surface totale des éléments. Les composantes du tenseur (29) sont faciles à déterminer [14,15]—voir équation (32). On introduit l'équation (28) dans l'équation (27) et séparément les équations (28) et (30) dans l'équation

(29) et l'on constate que les tenseurs de la répartition d'éléments surfaciques et de la forme coïncident

$$\widehat{H} = H^* \tag{31}$$

La géométrie des différentes inclusions sera assimilée à un ellipsoïde de révolution. De cette façon dans le cas d'un ellipsoïde fortement étiré la géométrie de l'inclusion sera proche d'une fibre, tandis que dans le cas d'un ellipsoïde aplati l'inclusion se rapporte d'une lamelle. Un cas intermédiaire sera l'inclusion sphérique. Dans [15] pour la troisième composante  $\widehat{H}_{33}$  du tenseur  $\widehat{H}$  dans une transformation (extension ou contraction) avec axe de symétrie  $0x_3$ , on a obtenu des expressions qui d'après l'équation (31) restent valables pour le tenseur de la géométrie des inclusions

$$H^* = \frac{\int_0^{\pi/2} \omega^2 \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \omega^2 \sin \theta \, d\theta} \tag{32}$$

où

$$\omega = [1 + ((b/a)^2 - 1) \sin^2 \theta]^{-1} \tag{33}$$

Dans l'équation (33)  $a$  et  $b$  sont les longueurs des axes de l'ellipsoïde où  $a$  suit la direction de la symétrie de rotation. Pour différents quotients  $a/b$  de l'inclusion ellipsoïdale on obtient différentes valeurs pour  $H^*$ . Certaines de ses valeurs, d'après les équations (32), (33) ont été rapportées dans le Tableau 1.

Après inversion de l'équation (26) on obtient dans le système local

$$\text{grad } T^* = (d\mathbf{1} + (b - d)(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) \cdot \langle \text{grad } T^\circ \rangle \tag{34}$$

où

$$d = \frac{2k}{2 + (k\eta_{11} - 1)(1 - H^*)}, \quad b = \frac{k}{1 + (k\eta_{33} - 1)H^*}$$

Dans les expressions ci-dessus,  $\eta_{11}$  et  $\eta_{33}$  sont les composantes respectives du tenseur des quotients des coefficients de la conductivité  $N$ , tandis que  $H^* = H_{33}^*$  est la troisième composante du tenseur de la forme (la géométrie) des inclusions. A cause de la symétrie matérielle par rapport à l'axe de l'inclusion  $\eta_{11} = \eta_{22}$ . Le gradient moyen du champ de la température  $T^*$  d'après l'équation (1) apparait comme

$$\langle \text{grad } T^* \rangle = \frac{1}{V^*} \int \text{grad } T^*(\mathbf{u}) \, dV^* \tag{35}$$

Tableau 1  
Fonction de la forme pour différentes géométries des inclusions

Géométrie de l'inclusion	$b/a$	$H^*$
lamelle	$\infty$	1
	10	0.951
	4	0.816
	2	0.599
sphère	1	0.33
	0.50	0.138
	0.25	0.046
	0.10	0.009
fibre	0	0

Pour la fonction de la répartition des inclusions par définition nous avons [12,14]

$$\Phi(\mathbf{u}) = \frac{dV^*(\mathbf{u}, d\Omega)}{V^* d\Omega(\mathbf{u})} \tag{36}$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur unité suivant l'axe de l'inclusion et  $d\Omega(\mathbf{u})$  est un angle solide contenant le vecteur  $\mathbf{u}$ —Fig. 2. Ici on a un autre système (global). Si l'axe d'une inclusion traverse l'angle solide (limité par la surface de la semisphère unitaire  $\Omega$ ) elle est orientée suivant  $\mathbf{u}$  dans les limites de  $d\Omega(\mathbf{u})$ . Le nombre  $dN(\mathbf{u}, d\Omega)$  des inclusions orientées suivant  $\mathbf{u}$  dans  $d\Omega(\mathbf{u})$  est proportionnel à  $d\Omega(\mathbf{u})$ . Le quotient  $\frac{dN(\mathbf{u}, d\Omega)}{N d\Omega(\mathbf{u})}$ , où  $N$  est le nombre total des inclusions, représente la densité de répartition des inclusions suivant  $\mathbf{u} - \Phi(\mathbf{u})$ . Dans le cas où le milieu hétérogène est uniforme par rapport à  $\Phi(\mathbf{u})$ , la densité de la répartition des inclusions peut être exprimée à l'aide des volumes respectifs—équation (36).

On remplace maintenant l'expression (36) dans l'équation (35) et l'on obtient

$$\langle \text{grad } T^* \rangle = \int_{\Omega} \text{grad } T^*(\mathbf{u}) \Phi(\mathbf{u}) \, d\Omega \tag{37}$$

Introduisons (37) dans (34), dans le système global on obtient

$$\langle \text{grad } T^* \rangle = (d\mathbf{1} + (b - d)\mathbf{H}) \cdot \langle \text{grad } T^\circ \rangle \tag{38}$$

où  $\mathbf{H} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \Phi(\mathbf{u}) \, d\Omega$ , est le tenseur symétrique de la texture [12,14,15]. Ce tenseur est engendré par la fonction de la répartition  $\Phi(\mathbf{u})$ . Les composantes de ce tenseur pour différents cas particuliers de la répartition des inclusions sont donnés dans [14]. On les calcule à l'aide de (28) avec « / » pour les angles dans le système global—Fig. 2. Par exemple pour une répartition aléatoire des inclusions  $H_{11} = H_{22} = H_{33} = 1/3$ , tandis que les autres composantes sont nulles. Pour un composite unidirectionnel (direction privilégiée (3)— $H_{33} = 1$ , les autres composantes sont nulles.

### 5. Tenseur effectif de la conductivité thermique

A partir des équations (12) et (38) on obtient une expression pour déterminer le tenseur  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \frac{d}{k} \mathbf{1} + \frac{b - d}{k} \mathbf{H} \tag{39}$$

Des équations (15), (18), (39) il suit

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + f(kN - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{M} \tag{40}$$

Alors à partir de (20), (40) pour le tenseur effectif de la conductivité thermique on a

$$\mathbf{K} = \frac{1}{1 - f(1 - k)} \mathbf{K}^\circ \cdot (\mathbf{1} + f(kN - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \tag{41}$$

Après inversion de l'équation (18) on arrive à

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{F} \mathbf{1} + \mathbf{G} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \tag{42}$$

où

$$F = \frac{1 + (m - 1)(1 - H)0.5}{p + f(1 - p) + f(m - 1)(1 - H)0.5}$$

$$G = \frac{1 + (m - 1)H}{p + f(1 - p) + f(m - 1)H} - F$$

$$p = \frac{k}{d} = 1 + 0.5(k\eta_{11} - 1)(1 - H^*)$$

$$m = \frac{b}{d} = \frac{1 + 0.5(k\eta_{11} - 1)(1 - H^*)}{1 + (k\eta_{33} - 1)H^*}$$

Dans ces expressions  $H = H_{33}$  est la troisième composante de  $\mathbf{H}$ .

Finalement, pour le tenseur effectif de la conductivité thermique à l'aide de (41) et (42) on obtient

$$\mathbf{K} = \frac{1}{1 - f(1 - k)} \mathbf{K}^\circ \cdot (\mathbf{1} + f(kN - \mathbf{1}) \cdot (F\mathbf{1} + G\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) \tag{43}$$

Il est à noter que les composantes de ce tenseur sont obtenues dans [6] d'une façon plus compliquée pour le cas particulier d'inclusions isotropes.

**6. Cas particuliers et exemples**

A la base des équations (33), (43) et du tenseur de la texture  $\mathbf{H} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \Phi(\mathbf{u}) d\Omega$  [14,15], on peut obtenir des cas particuliers très variés. Par exemple pour  $\eta_{ij} = 0$  on a affaire à un matériau poreux aux inclusions nonconductives, pour  $\eta_{ij} = \infty$  à un matériau poreux à la matrice nonconductive, pour  $H^* = 1/3$  on a des inclusions sphériques, pour  $H^* = 0$  on a des inclusions fibreuses etc. Pour  $H = 1/3$  on a une répartition isotrope (aléatoire) des inclusions. Pour  $H = 1$  on a un composite à inclusions unidirectionnelles etc. Dans la référence [15] on a obtenu une expression de  $H$  donnée pour une répartition symétrique des inclusions par rapport à un axe privilégié (il s'agit d'extension de fibres à module élevé, de membranes sous pression en ultrafiltration etc.). Des combinaisons de ces différents cas sont également possibles.

On va examiner quelques exemples en vue de déterminer la conductivité thermique longitudinale et transverse d'un composite en fonction des conductivités des phases.

Comme premier exemple on va examiner le cas d'un composite unidirectionnel armé de fibres en polyéthylène (PE) à très haute orientation avec une matrice en PE ordinaire. Dans le Tableau 2 sont données les valeurs pour la conductivité thermique longitudinale et transverse des phases pour trois températures différentes d'après [16]. Pour 295 K on a employé une technique « laser-flash ». L'incertitude pour les coefficients de la conductivité thermique est de 6 %. Pour les températures plus basses (50 et 100 K) on a employé la méthode « steady heat flow ». Dans ce cas une erreur de 8 % a été estimée. Le changement de la conductivité thermique axiale et transverse du composite pour ces trois températures est reporté Fig. 3(a) et (b) en fonction de la

fraction volumique des fibres d'après l'équation (43). Ainsi dans ce cas ( $k = 1, H^* = 0, H = 1$ ) on a

$$K_{11} = K_o \left( 1 + \frac{2f(\eta_{11} - 1)}{1 + \eta_{11} - f(\eta_{11} - 1)} \right)$$

$$K_{33} = K_o(1 + (\eta_{33} - 1)f) \tag{44}$$

Ici  $K_{11}$  et  $K_{33}$  représentent les composantes de la conductivité thermique longitudinale et transverse du composite et  $K_o$  est la conductivité de la matrice. Pour la conductivité transverse on a montré les courbes théoriques suivant l'équation de Halpin-Tsai [17]. Pour 295 K, les deux courbes théoriques coïncident. Les points expérimentaux sont obtenus dans la référence [16].

Les exemples suivants concernent des composites unidirectionnels à matrice epoxy ayant trois combinaisons de fibres :

- (1) Fibres en verre et fibres organiques,
- (2) Fibres organiques et fibres de carbone, et
- (3) Fibres en verre et fibres de carbone.

Dans le Tableau 3 sont illustrées les données des phases d'après [2]. On a tenu en compte également la contenance de pores dans la matrice. Le problème est résolu grâce aux équations (43), (44). On procède tout d'abord à une homogénéisation de la matrice poreuse à partir de l'équation (44)). Ici la conductivité thermique de la substance des pores est prise égale à  $K_p = 0.01 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  [18],  $H^* = H = 1/3$ . Puis les inclusions et la matrice ainsi conçue sont homogénéisées de manière à obtenir un corps d'isotropie transverse.

Tableau 2  
Composantes du tenseur de la conductivité thermique  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  des phases pour trois températures différentes pour un composite PE/PE d'après [16]

tens. $\mathbf{K}$	Temperature $K$					
	50	100	295	50	100	295
	Phase					
	Fibre			Matrice		
$K_{33}$	14.2	30	39	0.30	0.36	0.31
$K_{11}$	0.55	0.69	0.36	0.30	0.36	0.31

Tableau 3  
Composantes du tenseur de la conductivité thermique  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  des phases d'après [2]

Phases	Tens. $\mathbf{K}$	
	$K_{11}$	$K_{33}$
Fibre en verre	1.08	1.04
Fibre organ.	0.18	2.02
Fibre de carb.	1.99	6.47
Matrice	$K_{11} = K_{33} = K_o = 0.188$	

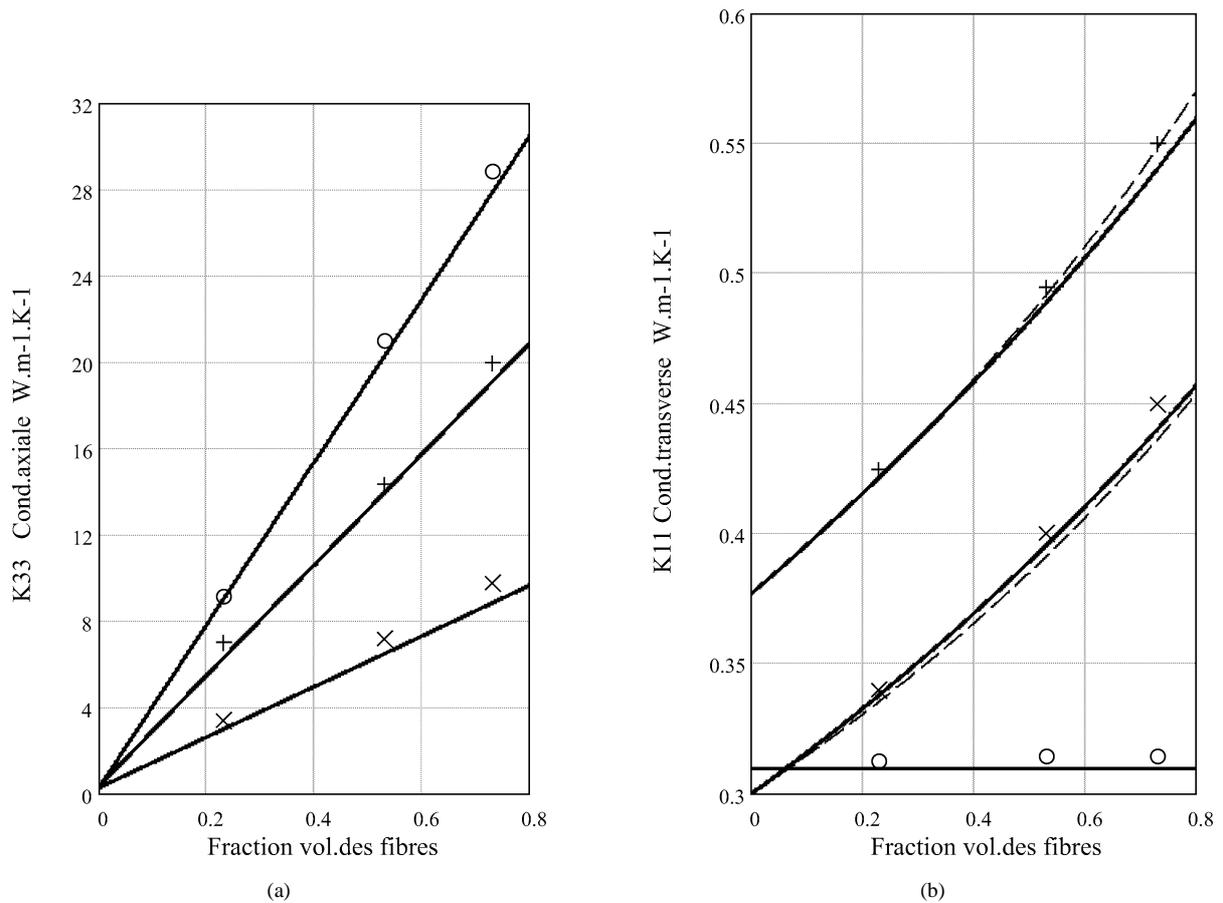


Fig. 3. (a) Conductivité thermique axiale d'un composite unidirectionnel PE/PE [16]. Expérimentations :  $\circ$  295 K,  $++$  100 K, 50 K. (b) Conductivité thermique transverse d'un composite unidirectionnel PE/PE. — notre modèle, - - - modèle de Halpin-Tsai [17], expérimentations :  $\circ$  295 K,  $++$  100 K,  $\times$  50 K [16].

Ainsi pour la conductivité transverse  $K_{11}$  et longitudinale  $K_{33}$ , on obtient les expressions

$$K_{11 A, B} = K_{op} \left( 1 + \frac{2(f_{max} - f_{A, B})(\eta_{11}^{A, B} - 1)}{1 + \eta_{11}^{A, B} - (f_{max} - f_{A, B})(\eta_{11}^{A, B} - 1)} \right)$$

$$K_{33}^A = K_{op}(1 + (\eta_{33}^A - 1)(f_{max} - f_B))$$

$$K_{33} = K_{33}^A(1 + (\eta_{33}^B - 1)f_B)$$

$$K_{op} = K_o \left( 1 + \frac{f_p}{(1 - f_p)/3 + 1/(K_p/K_o - 1)} \right)$$
(45)

dans lesquelles les indices  $A$  et  $B$  se rapportent au premier et deuxième élément de la combinaison,  $K_o$  est la conductivité de la matrice non poreuse,  $K_{op}$ —la conductivité de la matrice poreuse,  $f_p$ —la fraction volumique des pores dans la matrice,  $f_{max}$ —la fraction volumique totale des fibres qui a été constante et égale à 0,4 pour la deuxième combinaison et 0,5 pour les deux autres 1 et 3. La fraction volumique des pores pour la deuxième combinaison est de 0,03, tandis que pour les deux autres (1 et 3) est de 0,05. Les résultats des expressions (45) concernant les trois combinaisons considérées sont représentés respectivement sur les Figs. 4, 5 et 6 et comparés aux résultats expérimentaux d'après [2].

Une erreur maximale de 11% y est admissible. Sur les Figs. 4(b), 5(b) et 6(b) on a montré les courbes de Halpin-Tsai [17], Patterson [8] et celles du modèle en série [8]. Sur 4(b) et 6(b) la courbe de Patterson en pratique coïncide avec la notre.

L'exemple illustré sur la Fig. 7 se rapporte à un composite unidirectionnel (fibres de verre, matrice époxy). Les points expérimentaux sont obtenus dans la référence [3]. Ici les fibres possèdent des propriétés thermiques isotropes et pour le coefficient de la conductivité on a pris la valeur moyenne des deux coefficients du Tableau 3, c.à.d.  $1.06 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ . On y a montré également des courbes théoriques d'après les formules employées de Patterson [8] et Halpin-Tsai [17], d'après le modèle de Schulz [7] et le modèle en série [8]. On voit bien que nos courbes théoriques se trouvent plus près des points expérimentaux. Pour le coefficient transverse notre modèle et celui de Patterson sont pratiquement identiques. Il est à noter que les modèles de Patterson et Halpin-Tsai ne concernent que la conductivité transverse de composites unidirectionnels. A part cela le modèle du présent travail et les modèles de Christensen [4] et de Schulz [7] donnent les mêmes résultats pour les coefficients axiaux des composites uniaxiales.

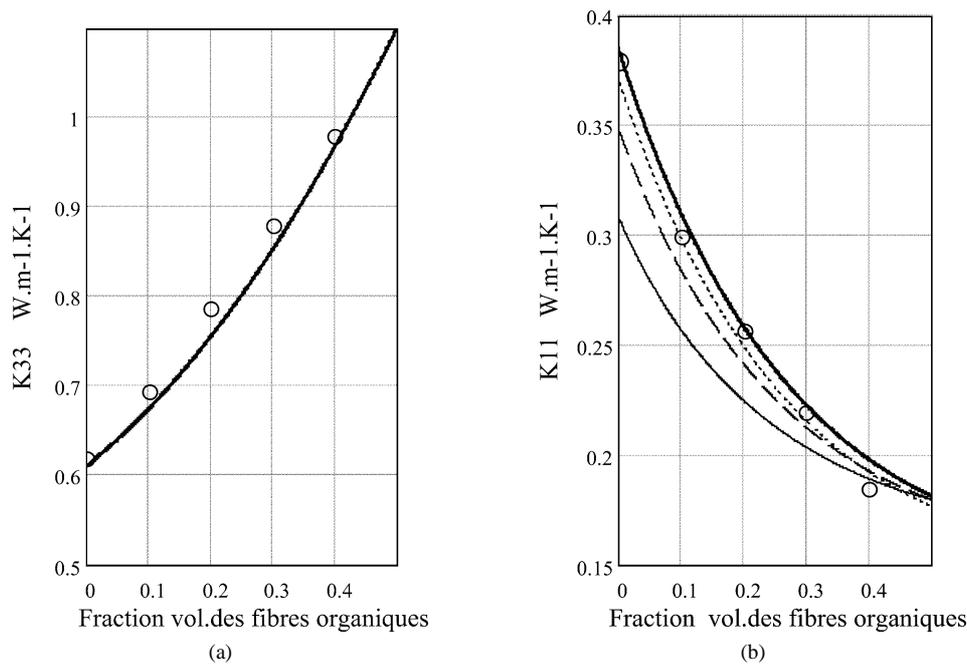


Fig. 4. Conductivité thermique axiale (a) et transverse (b) d'un composite unidirectionnel verre & organique, — notre modèle, ..... Patterson [8], --- Halpin-Tsai [17], o o o expérimentations [2].

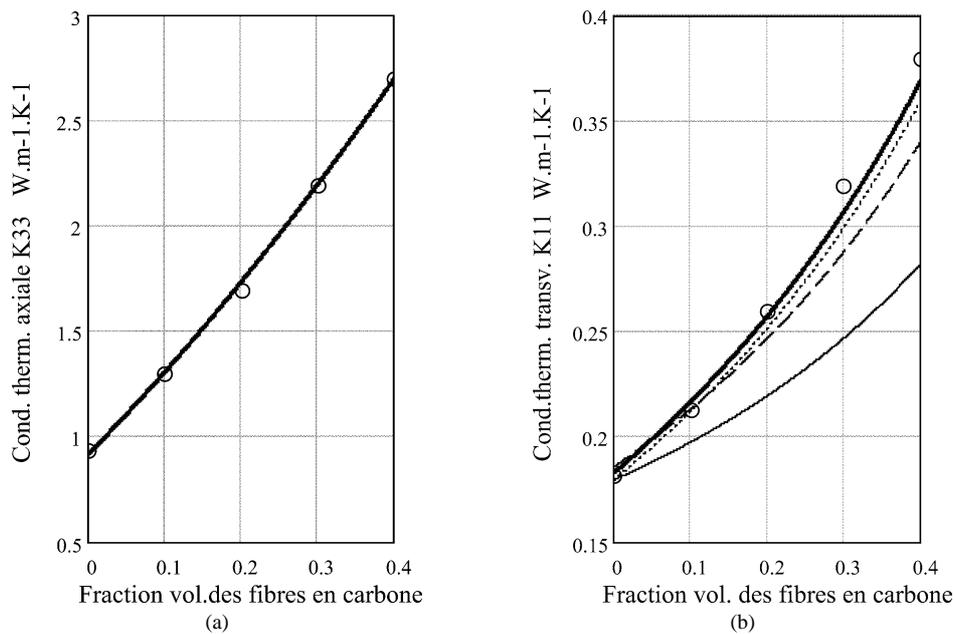


Fig. 5. Conductivité thermique axiale (a) et transverse (b) d'un composite unidirectionnel fibres organiques & carbone, — notre modèle, --- Halpin-Tsai [17], — modèle en série [8], ..... Patterson [8], o o o expérimentations [2].

Les deux derniers exemples traitent de l'influence de la forme des inclusions. Il s'agit d'un acier 304L [18] présentant des défauts (pores)—Fig. 8 et d'un composite sable de mines/polyéthylène [19]—Fig. 9. Sur la Fig. 8 on a fait une comparaison entre notre théorie, le modèle de Maxwell-Eucken (pores sphériques) [19], le modèle de Tzou [18] (pores sphériques et aplatis), un autre modèle assimilant la forme des inclusions à un ellipsoïde—Schulz [7] et les résultats expérimentaux respectifs obtenus

avec une erreur maximale de 15% [18]. Sur la Fig. 9 on a comparé notre courbe aux modèles de Maxwell-Eucken et Schulz. On a montré également la limite supérieure (en parallèle) et inférieure (en série). La forme des pores et des grains de sable (diamètre moyen 500  $\mu\text{m}$  [19]) a été simulée (voir les équations (32), (33)) à l'aide du quotient  $a/b$  (égal à 2,2 pour les pores et 0,475 pour les grains de sable d'après les photos données dans [19]).

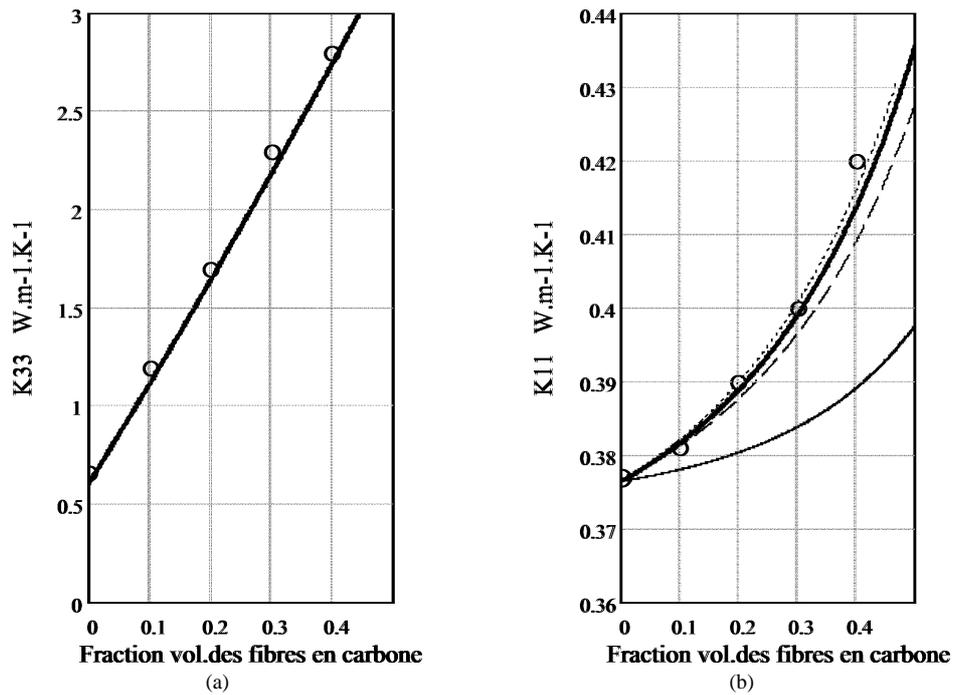


Fig. 6. Conductivité thermique axiale (a) et transverse (b) d'un composite fibreux—verre & carbone. — notre modèle, - - - Halpin-Tsai [17], . . . . . Patterson [8], \_\_\_ modèle en série [8], points expérimentaux [2].

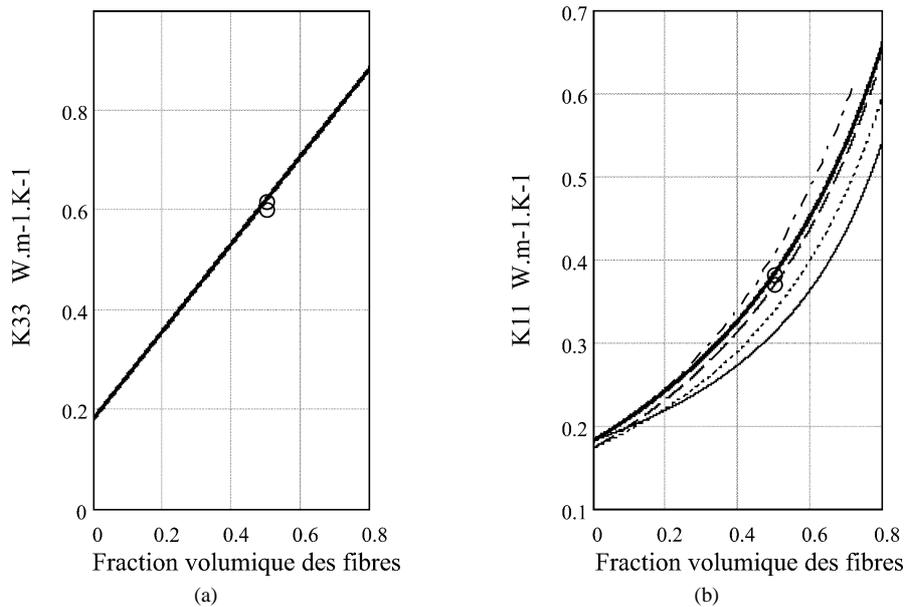


Fig. 7. Conductivité thermique axiale (a) et transverse (b) d'un composite de fibres en verre. — présent travail, . . . . . Halpin-Tsai [17], - - - Patterson [8], \_\_\_ modèle en série, - - - Schulz [7], o o o points expérimentaux [3].

### 7. Conclusion

On a obtenu une expression permettant de déterminer les composantes du tenseur de conductivité thermique des composites à texture arbitraire contenant des inclusions anisotropes de forme variable et des vides. Les résultats du modèle sont en bon accord avec un certain nombre de résultats expérimentaux. Certains cas particuliers d'inclusions et

de texture sont comparés aux modèles théoriques existants. Dans la plupart des cas on a constaté une meilleure concordance avec les expérimentations de nos courbes théoriques décrivant le changement des composantes du tenseur de la conductivité thermique avec l'accroissement de la fraction volumique des inclusions. Par analogie le modèle présenté peut être étendu à la détermination des coefficients de la diffusion massique.

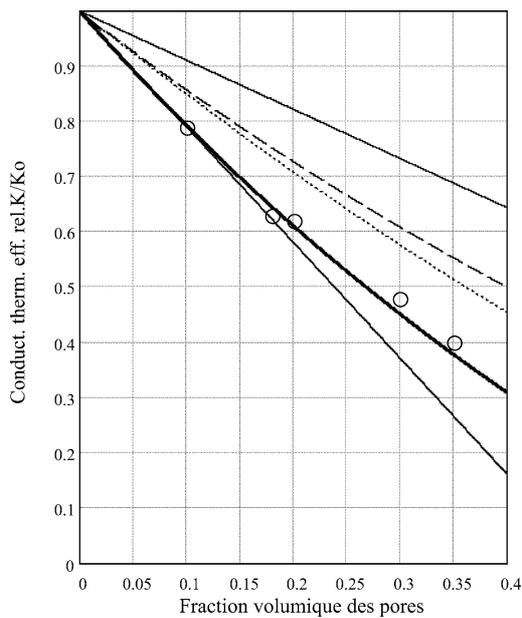


Fig. 8. Conductivité thermique effective relative (acier 304L avec pores) ——— présent travail, - - - M. Eucken [18] (inclusions sphériques), ——— limite supérieure (en parallèle) et inférieure (en série) [8], ····· Schulz [7] (inclusions ellipsoïdales), ○ ○ ○ points expérimentaux [18].

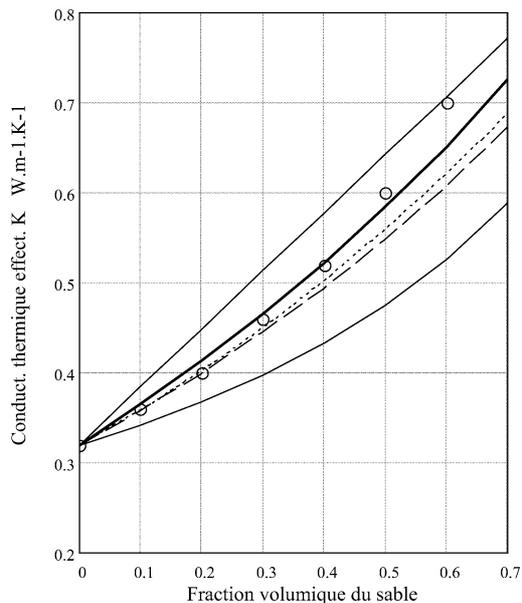


Fig. 9. Conductivité thermique effective d'un composite—Sable/PE. ——— limite supérieure (en parallèle) et inférieure (en série) [8] ——— présent travail, - - - M. Eucken [18] (inclusions sphériques), ····· Schulz [7] (inclusions ellipsoïdales), ○ ○ ○ expérimentations [19].

## Références

- [1] A. Maffezzoli, J.M. Kenny, L. Nicolais, Thermal analysis of thermoplastic matrices for advanced composite materials, *Thermochimica Acta* 199 (1) (1992) 133–146.
- [2] V.A. Kotshetkov, Thermal conductivity of unidirectional reinforced hybrid composites, *Mechanics of Composite Materials—Riga* 5 (1990) 817–822.
- [3] Z. Hashin, *Theory of Fibre Reinforced Materials*, NASA-CR1974, 1972.
- [4] R.M. Christensen, *Mechanics of Composite Materials*, Wiley, New York, 1979.
- [5] S. Larose, J.-J. Barrau, *Mécanique des Structures, Tome 4—Calcul des Structures en Matériaux Composites*, Eyrolles-Masson, Paris, 1987.
- [6] S.S. Nikolski, Diffusion and thermal conductivity in composites and porous materials, *Mechanics of Composite Materials—Riga* 4 (5) (1985) 715–722, 801–809.
- [7] B. Schulz, On the effective thermal diffusivity of macroscopic heterogeneous two phase materials, in: T. Ashworth, D.R. Smith (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference on Thermal Conductivity*, Rapid City, South Dakota, 1985, pp. 33–42.
- [8] J.D. Patterson, Error analysis and equations for the thermal conductivity of composites, in: T. Ashworth, D.R. Smith (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference on Thermal Conductivity*, Rapid City, South Dakota, 1985, pp. 733–742.
- [9] G.W. Milton, Thermal conduction in composites, in: T. Ashworth, D.R. Smith (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference on Thermal Conductivity*, Rapid City, South Dakota, 1985, pp. 571–582.
- [10] J.C. Slattery, *Theory of Impulse, Energy and Mass Transfer in Continuum*, Moscow, 1978 (translation in Russian).
- [11] F. Sidoroff, K. Hadjov, Anisotropic elasticity for fibre reinforced materials, *J. Theoretical Appl. Mech.—Sofia* 29 (6) (1999) 59–68.
- [12] S.S. Nikolski, Capillary and crack materials, *Mechanics of Composite Materials—Riga* 1, 2, 3 (1982) 3–8, 247–252, 407–415.
- [13] K. Hadjov, M. Marin, Anisotropic elasticity for polylayered aggregates, *Ann. University of Craiova* 1 (1999) 62–70.
- [14] K. Hadjov, K. Popov, Anisotropic elasticity for fibre and poly-layered aggregate reinforced materials, *European J. Mech. Environmental Engrg.* 45 (3) (2000) 131–137.
- [15] K. Hadjov, Orientation of uni- and biaxial particles in a deforming matrix with application to the drawing process of high modulus polyethylene fibres, *European J. Mech. Environmental Engrg.* 46 (3) (2001) 171–177.
- [16] C.L. Choy, Y. Fey, T.G. Xi, Thermal conductivity of gel-spun polyethylene fibers, *J. Polymer Sci. Part B: Polymer Phys.* 31 (1993) 365–370.
- [17] L.E. Nielsen, Thermal and electrical conductivity of two-phase systems, *Indust. Engrg. Chem. Fund.* 13 (1) (1974) 17–20.
- [18] D.Y. Tzou, A universal model for the overall thermal conductivity of porous media, *J. Comput. Materials* 25 (1991) 1064–1084.
- [19] A. Padilla, A. Sanchez-Solis, O. Manero, A note on the thermal conductivity of filled polymers, *J. Comput. Materials* 22 (1988) 616–628.